数理解析研究所講究録
239巻 1975年 50-67

On Local Solvability of Partial Differential Equations with Multiple Characteristics

京大 理学部 松本和一郎

1. Introduction. 偏微分作用素 $L(x;\partial_x)$ に対して、任意の $f(x)\in C^\infty$ を与えたとき、$Lu=f$ を満たす解 $u(x)$ が必ず存在するか？という問題を考える。$L(x,\partial_x)$ が principal type の時は必要十分条件が Nirenberg - Treves [7], Beals-Fefferman [1] によって与えられた。Double characteristics を持つ場合については必要条件が Cardoso-Treves [3] によって与えられた。その中で彼等は、証明の経過から、subprincipal part が重要な役割をはたしていることを指摘している。

ここでは、characteristics の multiplicities は単に、locally constant として高い重複度も許す。そのかわり、$L(x,\partial_x)$ の主要部は実係数であると仮定して、sub-principal part にも仮定をおいて、一つの十分条件を与える。（[5] 参照，証明の基本評価は [4] を利用する。）

$$L(x,\partial_x) = P(x,\partial_x) + Q(x,\partial_x) + R(x,\partial_x) \quad x\in\mathbb{R}^n$$

とかく。ここに、1) $P(x,\partial_x)$ は s 次で $L(x,\partial_x)$ の主要部。実係数をもつものとする。2) $Q(x,\partial_x)$ は $s-1$ 次斉次部分。3) $R(x,\partial_x)$ は高々 $s-2$ 次である。なお $L(x,\partial_x)$ の係数はすべて C^∞-class としておく。主要部 $P(x,\partial_x)$ に対する仮定をのべる。

<u>仮定 I</u>　P の characteristics は locally constant multiplicities を持つ。

すなわち、$J=\{(x,\xi)\in V_x\times S_\xi^{n-1} \mid P(x,\xi)=0\}$ (V_x は $\mathbb{R}^n_x$ の原点の近傍, S_ξ^{n-1} は dual space $\mathbb{R}^n_\xi$ の単位球。) とおくと、任意の $(x_0,\xi_0)\in J$ に対してある (x_0,ξ_0) の $V_x\times S_\xi^{n-1}$ での近傍 W とある自然数 m (depending on (x_0,ξ_0)) があって、次を満たす。

　J は W において、x を fix すると ξ について一定の重複度 m をもつ。

上の仮定 I は、実は J を connected components J_k の union にかくと、J_k が x に無関係に ξ について一定の重複度 m_k を持つことを意味している。更に J_k の各点の近傍において、適当に座標を回転することにより、$\xi'=(\xi_2,\cdots,\xi_n)$ とかくと、

$$P(x,\xi) = P_0(x,\xi)\{\xi_1 - \psi(x,\xi')\}^{m_k}$$

と、x について C^∞，ξ' について holomorphic の枠内で分解できる。ここに $P_0(x,\xi) = a_0(x)\{\xi_1^{s-m} - \sum_{j=0}^{s-m-1} a_j(x,\xi')\xi_1^j\}$ かつ、$P_0(x,\xi)$ は考えている点の近傍でゼロにならない。又、$P(x,\xi)$ が real-valued であることから、$\psi(x,\xi')$ も real-valued となる。

2. 命題及び定理.　次に、subprincipal symbol $\Pi(x,\xi) = Q(x,\xi) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \xi_j} P(x,\xi)$ に対しての仮定を述べる。$J^{(2)} = \{(x,\xi) \in J \mid \mathrm{grad}_\xi P(x,\xi) = 0\}$ とおき、$J^{(2)} = \bigcup_k J_k^{(2)}$ と、connected components に分ける。

仮定 II.　$\Pi(x,\xi)$ は各 $J_k^{(2)}$ 上で次の (A) 又は (B) のどちらかを満たす。

(A)　$\mathrm{Re}\,\Pi(x,\xi) \neq 0$　on $J_k^{(2)}$.

(B)　$\Pi(x,\xi) \equiv 0$　on $J_k^{(2)}$.　更に $m_k \geqq 3$ の時は

$$\mathrm{grad}_\xi \mathrm{Re}\,\Pi(x,\xi) \neq 0 \quad \text{on } J_k^{(2)}.$$

命題.　上の仮定の下に、任意の実数 l に対してある原点の近傍 Ω とある正定数 C があって、

$$\|L^* u\|_{-l-s+2,\mathbb{R}^n} \geqq C\|u\|_{-l,\mathbb{R}^n} \quad \text{for } \forall u \in \mathcal{D}(\Omega)$$

となる。特に $J^{(2)}$ 上で常に (A) が満たされている時は、

$$\|L^* u\|_{-l-s+1,\mathbb{R}^n} \geqq C\|u\|_{-l,\mathbb{R}^n} \quad \text{for } \forall u \in \mathcal{D}(\Omega).$$

上の命題は．Calderón が Cauchy 問題の解の一意性の証明に用いた評価を修正して得られる。（［2］,［4］参照）

命題を認めると、$(u,v)_{\mathcal{H}}=(L^*u,\ L^*v)_{-l-s+2,\mathbb{R}^n}$ の内積で $\mathcal{D}(\Omega)$ を完備化すると．Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ が得られる。このとき．$\mathcal{H}$ は $H^{-l}_{\Omega}(\mathbb{R}^n)$ の稠密な部分空間となっている。$(H^{-l}_{\Omega}(\mathbb{R}^n))'=H^l(\Omega)$ かつ $(H^{-l}_{\Omega}(\mathbb{R}^n))'\subset\mathcal{H}'$ だから．任意の $f(x)\in H^l(\Omega)$ に対して．Riesz の定理により唯一の $\mathcal{H}$ の元 $u(x)$ が対応して

$$\langle f,\varphi\rangle=(u,\varphi)_{\mathcal{H}}\qquad \text{for } \forall\varphi(x)\in\mathcal{H}$$

を満たす。特に $\varphi(x)\in\mathcal{D}(\Omega)$ に制限すると．$\sqrt{|\xi|^2+1}$ を symbol にもつ pseudo-differential operator を Λ とかけば．

$$(u,\varphi)_{\mathcal{H}}=(\Lambda^{-l-s+2}L^*u,\ \Lambda^{-l-s+2}L^*\varphi)_{L^2}\ 。$$

$\Lambda^{-l-s+2}L^*u\in L^2$ だから．$\Lambda^{2(-l-s+2)}L^*u=v$ とおくと $v\in H^{l+s-2}(\mathbb{R}^n)$ でかつ．$(Lv,\varphi)_{L^2}=\langle f,\varphi\rangle$ ，すなわち．distribution の意味で $Lv=f$ in Ω 。なお．$J^{(2)}$ 上で常に (A) が満たされているときは、内積として．$(L^*u,L^*v)_{-l-s+1,\mathbb{R}^n}$ を採用して．全く同様の推論を行えば．次の定理を得る。

定理．仮定I, II の下に．任意の実数 l に対してある原点の近傍 Ω があって．任意の $f(x)\in H^l(\Omega)$ に対して $Lv=f$ in Ω

の解 $v(x) \in H^{l+s-2}$ が存在する。特に $J^{(2)}$ 上で常に (A) が満たされている時は $v(x) \in H^{l+s-1}$ にとれる。

3. 命題の証明. $-l-s+2$ のかわりにあらためて $-l$ とかき、又、L が L^* と同じ条件を満たすことから、L を用いて、

$$\|Lu\|_{-l} \geqq C\|u\|_{-l+s-2} \quad \text{for } \forall u(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$$

を証明する。証明に $\mathbb{R}^n_\xi - \{0\}$ の単位の分割を用いるが、そのとり方は、以下のようである。すなわち、まず S^{n-1}_ξ の単位の分割 $\{\alpha_j(\xi)\}$ をとり、$\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ に対しては、$\alpha_j(\xi) = \alpha_j(\xi/|\xi|)$ で定義する。S^{n-1}_ξ 上での $\{\alpha_j(\xi)\}$ のとり方は、S^{n-1}_ξ 上の各点 ξ_0 について、その近傍に support を持つ $\{\alpha_j\}$ ($\alpha_j(\xi) \geqq 0$) をとる。そのうちから、$\{supp[\alpha_j]\}$ が S^{n-1}_ξ の covering になるように、Heine-Borel の定理により有限個をとり出し、$\tilde{\alpha}_j(\xi) = \alpha_j(\xi) / \sum_j \alpha_j(\xi)$ とおけばよい。各点 ξ_0 の近傍のとり方と、そこでの $\|\alpha \wedge^{-l} Lu\|$ の下からの評価は、次の五つの場合に分けて、検討する。$J \cap \{x=0\} \times S^{n-1}_\xi$ を $\mathring{J}$ とかき、他もこれにならう。

Case 1. $\xi_0 \notin \mathring{J}$

Case 2. $\xi_0 \in \mathring{J} \setminus \mathring{J}^{(2)}$

Case 3. $\xi_0 \in \mathring{J}^{(2)}_k$ でかつ、そこで (A) が満たされている。

Case 4.　$\xi_0 \in \mathring{J}_k^{(2)}$ で $m_k = 2$, (B) が満たされている。

Case 5.　$\xi_0 \in \mathring{J}_k^{(2)}$ で $m_k \geqq 3$, (B) が満たされている。

ここでは、Case 4 の場合は Case 2 の評価を2度用いることにより、又、Case 5 の場合は、Case 3 の評価と Case 2 の評価をくり返して適用することにより、容易に得られるから省略する。さしあたり、$\Omega = B_h$ ととる。B_h は原点を中心とする半径 h の球である。一般に、

$$
\begin{aligned}
(1)\quad \alpha(D)\Lambda^{-l}L(x,D)u = {} & P(x,D)(\alpha\Lambda^{-l}u) - iQ(x,D)(\alpha\Lambda^{-l}u) \\
& - i\,\mathrm{grad}_\xi\Lambda^{-l}\cdot\mathrm{grad}_x P(x,D)(\alpha u) \\
& - i\,\mathrm{grad}_\xi\alpha(D)\cdot\mathrm{grad}_x P(x,D)(\Lambda^{-l}u) + \tilde{R}(x,D)u,
\end{aligned}
$$

（$\tilde{R}(x,D)$ は高々 $s-2$ 次）。

4. Case 1. (elliptic estimate).

$\xi_0 \notin \mathring{J}$ ゆえ、ξ_0 の近傍 U_{ξ_0} と V_x を十分小さくとれば、$\overline{V_x}\times\overline{U_{\xi_0}}\cap J=\phi$ にとれる。(1) の右辺において、symbol $P(x,\xi)$ は $\mathrm{supp}[\alpha]$ の外では ξ について自由に修正してよいから、適当に修正すると、global に $|P(x,\xi)| \geqq \delta|\xi|^s$ $(\delta>0)$ とできる。したがって、

$$(4.1)\qquad \| P(x,D)(\alpha\Lambda^{-\ell}u)\| \geqslant \delta\|\alpha\Lambda^{-\ell}u\|_s - C(k,h)\|u\|_{-k}.$$

ゆえに，(1) の estimate は

$$(4.2)\qquad \|\alpha\Lambda^{-\ell}Lu\| \geqslant \frac{\delta}{2}\|\alpha u\|_{s-\ell} - \sum_{j=1}^{n}\|\alpha_{\xi_j}u\|_{s-\ell}$$
$$-C\|u\|_{s-\ell-2} - C(k,h)\|u\|_{-k}.$$

更に $\|\alpha_{\xi_j}u\|_{s-\ell}$ の処理のために，$\|\alpha_{\xi_j}\Lambda^{-\ell}Lu\|$ の評価

$$(4.3)\qquad \|\alpha_{\xi_j}\Lambda^{-\ell}Lu\| \geqslant \frac{\delta}{2}\|\alpha_{\xi_j}u\|_{s-\ell} - C\|u\|_{s-\ell-2} - C(k,h)\|u\|_{-k}$$

を用いると，適当な正定数 C_j ($1\leq j\leq n$) により，

$$(4.4)\qquad C\|Lu\|_{-\ell} \geqslant \|\alpha\Lambda^{-\ell}Lu\| + \sum_{j=1}^{n}C_j\|\alpha_{\xi_j}\Lambda^{-\ell}Lu\|$$
$$\geqslant \frac{\delta}{2}\|\alpha u\|_{s-\ell} - C'\|u\|_{s-\ell-2} - C(k,h)\|u\|_{-k}.$$

5. Case 2. (*hyperbolic estimate*). まず $J\setminus J^{(2)}$ 上の各点の近傍に support をもつ $\{\alpha_j^{(1)}\}$ をとり，$\{supp[\alpha_j^{(1)}]\}$ が $J\setminus J^{(2)}$ の covering になるように Heine-Borel の定理で有限個をとり出す。更に $\{supp[\alpha_j^{(2)}]\}$ が $\partial(\bigcup_j supp[\alpha_j^{(1)}])$ の covering になるように，有限個の $\alpha_j^{(2)}$ を追加する。このとき，$supp[\alpha_j^{(2)}]\cap J=\phi$ となるようにとれる。このようにとると，$\sum_j\alpha_j^{(1)}+\sum_j\alpha_j^{(2)}\geq C_0>0$ on $supp(\sum_j\alpha_j^{(1)})$ となる。適当な座標の回転により，

$$P(x,\xi) = (\xi_1-\psi(x,\xi'))P_0(x,\xi) \quad \text{on } supp[\alpha_j^{(1)}]$$

かつ $P_0(x,\xi)\neq 0$ on $supp[\alpha_j^{(1)}]$ とできる。

簡単のために，$\alpha_j^{(1)}$ を α とかくと，(1) より

(5.1) $$\|\alpha\Lambda^{-\ell}Lu\| \geqq \|(D_1-\psi(x,D'))P_0(x,D)\alpha\Lambda^{-\ell}u\| - \|\alpha u\|_{s-\ell-1} - \sum_{j=1}^{n}\|\alpha_{\xi_j}u\|_{s-\ell} - c\|u\|_{s-\ell-2}.$$

§5.1. $\|(D_1-\psi(x,D'))P_0(x,D)\alpha\Lambda^{-\ell}u\|$ について. $\beta(x)\in\mathcal{D}(B_{2h})$ を. $\beta(x)=1$ on B_h となるようにとる。擬微分作用素の quasi-local property を考慮すると. $v=P_0(x,D)\alpha\Lambda^{-\ell}u$ とおいて

$$\|(D_1-\psi(x,D'))v\| \geqq \|(D_1-\psi(x,D'))\beta v\| - C(k,h)\|u\|_{-k}$$

を得る。右辺第一項に weight function $\varphi(x_1)=(x_1+3h)^{-1}$ を用いて Calderón 式評価を行うと.（[2] 参照）

$$\begin{aligned}\|(D_1-\psi(x,D'))\beta v\| &\geqq h\|\varphi(x_1)(D_1-\psi(x,D'))\beta v\| \\ &\geqq h\|\varphi'(x_1)\beta v\| \\ &\geqq 5^{-2}h^{-1}\|v\| - C(k,h)\|v\|_{-k}.\end{aligned}$$

更に $P_0(x,D)$ が supp[α] 上で elliptic ゆえ. Case 1 と同様にして.

(5.2) $$\|(D_1-\psi(x,D'))P_0\alpha_j^{(1)}\Lambda^{-\ell}u\| \geqq c_0h^{-1}\|\alpha_j^{(1)}u\|_{s-\ell-1} - C(k,h)\|u\|_{-k}.$$

§5.2 $\|\alpha_{j\,\xi_k}^{(1)}u\|_{s-\ell}$ について. 一方. $\|\alpha_{j\,\xi_k}^{(1)}u\|_{s-\ell}$ については.

(5.3) $$\begin{aligned}\|\alpha_{j\,\xi_k}^{(1)}u\|_{s-\ell} &\leqq c_0^{-1}\|\alpha_{j\,\xi_k}^{(1)}(\textstyle\sum_i\alpha_i^{(1)}+\sum_i\alpha_i^{(2)})u\|_{s-\ell} \\ &\leqq c\ (\textstyle\sum_i\|\alpha_i^{(1)}u\|_{s-\ell-1}+\sum_i\|\alpha_i^{(2)}u\|_{s-\ell-1}).\end{aligned}$$

§5.3 $\|\alpha_i^{(2)}\Lambda^{-\ell}Lu\|$ について及び総和. $\|\alpha_i^{(2)}\Lambda^{-\ell}Lu\|$

については．Case 1. (4.4) の elliptic estimate が成り立つから．quasi-local property を考慮して．

(5.4) $$\|\alpha_i^{(2)}\Lambda^{-\ell}Lu\| \geqslant \frac{\delta}{2}\|\alpha_i^{(2)}u\|_{s-\ell} - C\|u\|_{s-\ell-2} - C(k,h)\|u\|_{-k}$$
$$\geqslant \frac{\delta}{2h}\|\alpha_i^{(2)}u\|_{s-\ell-1} - C\|u\|_{s-\ell-2} - C(k,h)\|u\|_{-k}.$$

したがって (5.2)〜(5.4) により．

$$\sum_j\|\alpha_j^{(1)}\Lambda^{-\ell}Lu\| + \sum_j\|\alpha_j^{(2)}\Lambda^{-\ell}Lu\|$$
$$\geqslant C_1h^{-1}\Big(\sum_j\|\alpha_j^{(1)}u\|_{s-\ell-1} + \sum_j\|\alpha_j^{(2)}u\|_{s-\ell-1}\Big)$$
$$- C_2\Big(\sum_j\|\alpha_j^{(1)}u\|_{s-\ell-1} + \sum_j\|\alpha_j^{(2)}u\|_{s-\ell-1}\Big)$$
$$- C'\|u\|_{s-\ell-2} - C(k,h)\|u\|_{-k}.$$

すなわち．

(5.5) $$\|Lu\|_{-\ell} \geqslant C_1'h^{-1}\Big(\sum\|\alpha_j^{(1)}u\|_{s-\ell-1} + \sum_j\|\alpha_j^{(2)}u\|_{s-\ell-1}\Big)$$
$$- C'\|u\|_{s-\ell-2} - C(k,h)\|u\|_{-k},$$
(for sufficiently small h).

6. Case 3. (subelliptic estimate).

§6.1. system 化.

$\{\mathrm{supp}[\alpha_j]\}$ が $\mathring{J}_k^{(2)}$ の covering になるように有限個の $\{\alpha_j\}$ をとる。適当な座標の回転により，

$$P(x,\xi) = P_0(x,\xi)(\xi_1 - \psi(x,\xi'))^m \quad \text{on } \mathrm{supp}[\alpha_j].$$

ここに $P_0(x,\xi) = a_0(x)\{\xi_1 - \sum_{j=0}^{s-m-1} a_j(x,\xi')\xi_1^{\,j}\}$。$\mathrm{proj}_{\xi\to\xi'}(\mathrm{supp}[\alpha_j])$ の外で $P(x,\xi)$ を，ξ' に関して適当に修正しておけば，C^∞ の滑らかさの枠内で $\psi(x,\xi')$, $a_j(x,\xi')$ は global に定義される。

$$\Pi_0(x,D) = P_0(x,D)\,(D_1-\psi(x,D'))^m$$

$$i\,\Pi_1(x,D) = \Pi_0(x,D) - P(x,D) + iQ(x,D) + i\,\mathrm{grad}_\xi \Lambda^{-l}\cdot \mathrm{grad}_x P(x,D)\,\Lambda^l$$

とおくと、(1)は、

(6.1) $$\alpha\Lambda^{-l}Lu = \Pi_0(x,D)(\alpha\Lambda^{-l}u) - i\,\Pi_1(x,D)(\alpha\Lambda^{-l}u) - i\,\mathrm{grad}_\xi\alpha(D)\cdot\mathrm{grad}_x P(x,D)(\Lambda^{-l}u) + \tilde{R}(x,D)u.$$

ここに、Π_1 の主要部を Π_1^0 とすると、$\Pi_1^0(x,\xi)\equiv\Pi(x,\xi)$ mod. $(\xi_1-\psi(x,\xi'))^m$. さらに

$$\Pi_1^0(x,\xi) = \sum_{k=1}^{m+1} b_k(x,\xi')|\xi'|^{s-k}(\xi_1-\psi(x,\xi'))^{k-1} + \sum_{k=m+2}^{s} b_k(x,\xi')|\xi'|^{s-k}\xi_1^{k-m-1}(\xi_1-\psi(x,\xi'))^m$$

($b_k(x,\xi')$ は ξ' に関して斉次で order ゼロ)

とおく。(6.1) を system 化する。$|\xi'|$ を symbol とする擬微分作用素を Λ_0 とかく。$\hat{u}=\alpha\Lambda^{-l}u$ とおく。

$$u_j = \begin{cases} (\Lambda_0+1)^{s-j}(D_1-\psi(x,D'))^{j-1}\hat{u} & 1\le j\le m+1 \\ (\Lambda_0+1)^{s-j}D_1^{j-m-1}(D_1-\psi(x,D'))^m\hat{u} & m+2\le j\le s \end{cases}$$

とおき、$U=(u_j)$ とかくと、

(6.2) $$\tilde{L}(x,D)U = D_1U - HU - BU - G_1U - G_2U - \sum_{j=0}^{n} U_j\,.$$

ここに、

$$H(x,D') = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \psi(x,D') & \Lambda_0 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & \Lambda_0 & & & & \\ & & & \psi(x,D') & \Lambda_0 & & & \\ \hline & & & & 0 & \Lambda_0 & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & 0 & \Lambda_0 \\ ib_1 & \cdots & & ib_m & a_0+ib_{m+1} & \cdots & & a_{s-m-1}+ib_s \end{array}\right),$$

$a_j(x, D')$ は斉次で order 1 , $b_j(x, D')$ は斉次で order 0.

$$B(x, D') = \left(\begin{array}{cccc|cccc} c_1 & 1 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & c_m & 1 & & & \\ \hline & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 0 \end{array}\right), \quad c_j = [(\Lambda_0+1)^{s-j}, \psi](\Lambda_0+1)^{-(s-j)}.$$

$$G_1(x, D') = \begin{pmatrix} & & 0 & & \\ 0, \cdots, 0, & g_{m+1}^{(1)}, & \cdots\cdots, & g_s^{(1)} \end{pmatrix}, \quad g_j^{(1)} = a_{j-m-1}\{\Lambda_0^{s-j} - (\Lambda_0+1)^{s-j}\} \times \times (\Lambda_0+1)^{-s+j}.$$

$$G_2(x, D') = \begin{pmatrix} & 0 & \\ g_1^{(2)}, & \cdots\cdots\cdots, & g_s^{(2)} \end{pmatrix}, \quad g_j^{(2)} = i b_j \{\Lambda_0^{s-j} - (\Lambda_0+1)^{s-j}\}(\Lambda_0+1)^{-s+j}.$$

$$U_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u^{(j)} \end{pmatrix}, \quad u^{(j)} = i P'_{\alpha_j}(x, D)\, \alpha_{\xi_j} \Lambda^{-l} u = P_j (D_1 - \psi)^{m-1} \alpha_{\xi_j} \Lambda^{-l} u$$

($P_j(x, D)$ は order $s-m+1$, $1 \le j \le n$),

$$\|u^{(0)}\| \le \|u\|_{s-l-2}.$$

なお、明かに $\|\alpha \Lambda^{-l} L u\| = \|\tilde{L} U\|$.

§6.2. Hのψに対応する固有値と固有vector. ψに対応するm個の固有値は次の様にPuiseux展開される。

<u>Lemma 1.</u> $\mu_j(x, \xi') = \psi(x, \xi') + \sum_{k=1}^{\infty} \nu_{j,k}(x, \xi') |\xi'|^{1-\frac{k}{m}}$

特に $\nu_{j,1} = \omega^{(j-1)} \left\{ \dfrac{i b_1}{P_0|_{\xi_1=\psi}} \right\}^{\frac{1}{m}}$ は non-real $(1 \le j \le m)$.

ここに ω は1の原始m乗根である。

(証明は [6], [4] 参照)

μ_j に属する $H/|\xi'|$ の固有 vector $V_j = (v_{jk})$ の主要部は.

Lemma 2. $\quad v_{jk} \sim (\mu_j - \psi)^{m-k} P_0(x,\xi)|_{\xi_1=\psi} \quad (1 \le k \le m)$

$v_{js} = 1$

又、v_{jk} $(m+1 \le k \le s-1)$ の主要部の order は高々ゼロ。

§6.3. H_1 の ψ 以外の固有値と root vectors.

$$H_1(x,\xi') = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
\psi(x,\xi') & |\xi'| & & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & & & & & \\
 & & & |\xi'| & & & & \\
 & & & \psi(x,\xi') & |\xi'| & & & \\
\hline
 & & & & 0 & |\xi'| & & \\
 & & & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & & 0 & |\xi'| \\
 & & & & a_0(0,\xi_0')\frac{|\xi'|}{|\xi_0'|} & \cdots & \cdots & a_{s-m-1}(0,\xi_0')\frac{|\xi'|}{|\xi_0'|}
\end{array}\right)$$

とおくと. $\det(\lambda I - H_1) = (\lambda - \psi)^m P_0(0; \lambda, \xi_0' \cdot |\xi'|/|\xi_0'|)$ となるから. $\det(\lambda I - H_1) = 0$ の ψ 以外の根を $\lambda_k(|\xi'|)$ とすると. $\lambda_k(|\xi'|) = \lambda_k |\xi'|$ (λ_k は定数) となる。λ_k の重複度を r_k $(1 \le k \le q)$ とする。

以下. $H_0 = H_1/|\xi'|$, $\lambda_k = \lambda$, $r_k = r$ とかくと、$\lambda I - H_0$ の rank が $s-1$ ゆえ、root space の構造は自然に決まる。root vector v は $v(\lambda I - H_0)^r = 0$ の non-trivial solution である。$(\lambda I - H_0)^r$ の $m+1$ 列から $m+r$ 列までを除いた行列 H_4 の上から $s-r$ 行までをとった行列 H_5 が maximal rank $s-r$ を与えることに注目する。 $V_1=(w_1,\cdots,w_{s-r},1,0,\cdots,0)$, $w_k=-\Delta^{-1}\cdot\Delta_{s-r+1,k}$ ($\Delta=\det H_5$, $\Delta_{s-r+1,k}$ は H_5 の k 行を H_4 の $s-r+1$ 行でおきかえた行列の行列式) とおくと.

<u>Lemma 3.</u> $V_j^{(k)}=V_1^{(k)}(H_0-\lambda_k I)^{j-1}$ $(1\leq j\leq r_k)$ が H_0 の λ_k に属する root vectors のすべてを与える。なお、$V_j^{(k)}$ において、はじめの m 個の成分はゼロであり、第 s 成分は定数である。

§6.4 matrix $N(x,\xi')$ と $H(x,\xi')$ の Jordan 標準形.

$N_1={}^t(V_1,\cdots,V_m,\vec{0},\cdots,\vec{0})$, $N_2={}^t(\vec{0},\cdots,\vec{0},V_1^{(1)},\cdots,V_{r_1}^{(1)},V_1^{(2)},\cdots,V_{r_g}^{(g)})$ そして $N=N_1+N_2$; 又

$$\mathcal{D}=\begin{pmatrix} \mu_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \mu_m & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix}\lambda_1 & \Lambda_0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \Lambda_0 \\ & & & \lambda_1\end{matrix}} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \boxed{\begin{matrix}\lambda_g & \Lambda_0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \Lambda_0 \\ & & & \lambda_g\end{matrix}} \end{pmatrix},$$

$$H_2=\begin{pmatrix} & & 0 & & \\ 0,\cdots,0, & a_0(x,\xi')-a_0(0,\frac{\xi'_0}{|\xi'_0|}|\xi'|), & \cdots\cdots, & a_{s-m-1}(x,\xi')-a_{s-m-1}(0,\frac{\xi'_0}{|\xi'_0|}|\xi'|) \end{pmatrix},$$

$$H_3=\begin{pmatrix} & 0 & \\ ib_1(x,\xi'), & \cdots\cdots, & ib_s(x,\xi') \end{pmatrix},$$

とおく。明かに $H=H_1+H_2+H_3$ である。N_1, N_2 のとり

方から $NH = N_1H + N_2(H_1 + H_2 + H_3) = \theta N_1 + \theta N_2 + N_2H_2 + N_2H_3$

となる。

§6.5. $M = N^{-1}$ について.

Lemma 4. $\det N$ は true order $-\frac{m-1}{2}$ である。

Lemma 4 より. $M = N^{-1}$ は第 i 行が $\max\{1-\frac{i}{m}, 0\}$ の order を持ち. $N = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ 0 & * \end{array}\right)$ の形より M も $M = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ 0 & * \end{array}\right)$ の形である。従って. $M \circ N - MN$ は order が高々 $-\frac{1}{m}$ で. 特に m 行から s 行までは高々 -1 の order である。さらに $M \circ N - MN$ は $\left(\begin{array}{c|c} * & * \\ 0 & * \end{array}\right)$ の形である。以上のことから. $NU = V$ とおき. quasi-local property を考慮すると. 次の lemma を得る。

一般に $W = (w_k)$ としたとき. $W^{(1)} = {}^t(w_1, \cdots, w_m, 0, \cdots, 0)$, $W^{(2)} = {}^t(0, \cdots, 0, w_{m+1}, \cdots, w_s)$, $W^{(3)} = {}^t(0, \cdots, 0, w_m, w_{m+1}, \cdots, w_s)$ とかく。

Lemma 5. 任意の実数 k に対して.

$$\|(\Lambda_0+1)^{1-\frac{1}{m}} V\|_k \geqq C\|U\|_k - C'\|\alpha u\|_{s-\ell-2+k}$$

$$\|V^{(2)}\|_k \geqq C\|U^{(2)}\|_k - C'\|\alpha u\|_{s-\ell-2+k}$$

$$\|V\|_k \geqq C\|U^{(3)}\|_k - C'\|\alpha u\|_{s-\ell-2+k}$$

以下. $N\breve{L}U$ の評価を行うのであるが. k_j $(1 \leqq j \leqq s)$ を正定数として. $K = \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_s \end{pmatrix}$ とおき. $KN\breve{L}U$ の評価をする。($\|KW\| = \sum_{j=1}^{s} k_j \|w_j\|$)。

(6.3) $$KN\tilde{L}U = K(D_1-\vartheta)V + iKN'_{x_1}U - K(NH-N\circ H)U - K(\vartheta\circ N-\vartheta N)U - KN_2H_2U - KN_2H_3U - KNBU - KNG_1U - KNG_2U - \sum_{j=0}^{n} KNU_j .$$

§.6.6. type N と KN_2H_2 及び KN_2H_3 について. $A=(a_{ij}(D'))$ が type N であるとは A が次の 1)〜3) を満たすことである。 1) $a_{ij}\in S^0_{1,0}$, 2) $ord.(a_{ij})\le \min\{-1+\frac{j}{m}, 0\}$, 3) $1\le i\le m$, $m+1\le j\le s$ のとき $a_{ij}\equiv 0$.

Lemma 6. A が type N のとき $V=NU$ とすると.

$$\|AU\|_k \le C\|V\|_k + C(i)\|(\Lambda_0+1)^{-i}U\|_k .$$

Lemma 7. KN'_{x_1} , $K(NH-N\circ H)$, $K(\vartheta\circ N-\vartheta N)$, KNB, KNG_1, KNG_2 はすべて type N である。

一方 N_2 の形と H_2 の ϑL^2_1 から L^2 への operator norm が supp$[\alpha]$ を十分小さくしぼっておけば十分小さい ε でおさえられることから, $k'=\max_{m+1\le j\le s}\{k_j\}$ とおくと.

Lemma 8. $$\|KN_2H_2U\|\le\varepsilon\|(\Lambda_0+1)U^{(2)}\|,$$
$$\|KN_2H_3U\|\le k'\cdot C\|U\| .$$

§ 6.7. $K(D_1-\vartheta)V$ の評価. $1\le j\le m$ のとき $K(D_1-\vartheta)V$ の第 j 行は. $k_j\|(D_1-\mu_j)v_j\|$ である。$\|Im\,\mu_j(x,D')v_j\|\sim\|(\Lambda_0+1)^{1-\frac{1}{m}}v_j\|$ であるから、$\|(D_1-\mu_j)v_j\|\ge\|U\|_{1-\frac{1}{m}} - C(i)\|u\|_{-i}$ を得る。
一方 $m+1$ 行から $s-1$ 行までは. $k_j\|(D_1-\lambda_{j'})v_j-\Lambda_0 v_{j+1}\|\ge$

$k_j\|(D_1-\lambda_{j'})v_j\| - k_j\|\Lambda_0 v_{j+1}\|$, s 行は $k_s\|(D_1-\lambda_{g})v_s\|$ である。supp[α] の上で $\xi_1-\lambda_{j'}$ (|β'|) はゼロにならないから dual space の quasi-local property を考慮して、supp[α] の外で ξ_1 を変更すると、$\|(D_1-\lambda_{j'})v_j\| \geq c\|v_j\|_1 - C(i)\|u\|_{-i}$ を得る。したがって適当に k_j $(m+1\le j\le s)$ を fix し、$k_1=\cdots=k_m=k_0$ ととると、

(6.4) $$\|K(D_1-\Theta)V\| \geq c_0k_0\|V^{(1)}\|_{1-\frac{1}{m}} + c_1\|V^{(2)}\|_1 - C(i,h)\|u\|_{-i}.$$

(6.4) 及び Lemma 5, 6, 7, 8 により、k_0 を十分大きく、h を十分小さくとれば次の評価を得る。

(6.5) $$\|K\mathcal{N}\tilde{L}v\| \geq c_0'(\|v\| + \|v^{(3)}\|_{1-\frac{1}{m}}) - \sum_{j=1}^{n}\|v_j\| - C\|u\|_{s-\ell-2} - C(k_j,h,i)\|u\|_{-i}.$$

一方、α のかわりに $\alpha_{\xi_j}\Lambda^{\frac{1}{m}}$, $\alpha_{\xi_j\xi_k}\Lambda^{\frac{2}{m}}$ を用いてつくられる v にあたるものを $v_{(j)}$, $v_{(jk)}$ とかくと、$\|v_j\| \le c\|v^{(3)}_{(j)}\|_1$, $\|v_{jk}\| \le c\|v^{(3)}_{(jk)}\|_1$ だから、適当に c_j, c_{jk} $(1\le j,k\le n)$ をとれば、

(6.6) $$\|\alpha\Lambda^{-\ell}Lu\| + \sum_{j=1}^{n} c_j\|\alpha_{\xi_j}\Lambda^{\frac{1}{m}-\ell}Lu\| + \sum_{j,k=1}^{n} c_{jk}\|\alpha_{\xi_j\xi_k}\Lambda^{\frac{2}{m}-\ell}Lu\| \geq c\|\alpha u\|_{s-\ell-1} - C(k_j,h,i)\|u\|_{-i} - C'\|u\|_{s-\ell-2}.$$

(4.4), (5.5), (6.6) を寄せ集めると、

(6.7) $$\|Lu\|_{-\ell} \geq c\sum_{j}\|\alpha_j u\|_{s-\ell-1} - C\|u\|_{s-\ell-2} - C(h,i)\|u\|_{-i} \geq c\|u\|_{s-\ell-1} - C(h,i)\|u\|_{-i}.$$

ここで $i=s-\ell-3$ にとり、$u(x)$ を $\Theta(B_d)$ $(d<h)$ の元に制限

すると、十分小さいdについては(6.7)は下の不等式を含んでいる。(L. Nirenberg - F. Treves [7], Part II 参照)

$$\|Lu\|_{-\ell} \geq C_0 \|u\|_{s-\ell-1} \quad (6.8)$$

Q. E. D.

References

[1] R. Beals and C. Fefferman : On local solvability of l. p. d. e. Ann. Math. 97, 482-498 ('73)

[2] A. P. Calderón : Uniqueness in the Cauchy problem for p.d.e. Amer. J. 80, 16-36 ('58)

[3] F. Cardoso and F. Treves : A necessary condition of local solvability for pseudo-d. e. with double characteristics. Ann. Inst. Fourier, 24 (no. 1), 225-292 ('74)

[4] W. Matsumoto : Uniqueness in the Cauchy problem for p. d. e. with multiple characteristic roots. J. Math. Kyoto Univ. (to appear).

[5] ———— : Local solvability of a class of p. d. e. with multiple characteristics. Proc. Japan. Acad. (to appear)

[6] S. Mizohata and Y. Ohya : Sur la condition d'hyperbolicité pour les équations à caractéristiques

multiples II. Japan J. Math. 40, 63-104 ('71)

[7] L. Nirenberg and F. Treves : On local solvability of l.p.d.e. Part I Necessary condition, Part II Sufficient condition. Comm. Pure Appl. Math., 23, 1-38, 459-509 ('70).